Spin-Strukturen und das Spektrum des Dirac-Operators

Kurze Zusammenfassung der Dissertation von Dr. Bernd Ammann

In der Dissertation wurden die Eigenwerte des so genannten Dirac-Operators untersucht. Die Mathematiker erhoffen sich von einer genaueren Kenntnis dieses Operators ein besseres Verständnis für den Zusammenhang zwischen Topologie, das ist die Theorie elastischer mehrdimensionaler Räume, und Differentialgeometrie, das ist die Theorie gekrümmter Räume. Erkenntnisse dieser Art können vor allem in der theoretischen Physik interessant werden, da sie die Grundlagen fuer neue mathematische Modelle erforschen, die die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik in einen einheitlichen Formalismus vereinen.

Zusammenfassung der Dissertation von Dr. Bernd Ammann für die Broschüre

1 Physikalischer Ursprung des Gebiets

Die Spektraltheorie von elliptischen Differential-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten hat sich in den letzten Jahrzehnten zu einer ungeahnten Blüte entwickelt. Der weitaus bekannteste elliptische Differential-Operator ist der Laplace-Operator. In der Physik ist der Laplace-Operators der wahrscheinlich wichtigste Operator zur Beschreibung von Wellenphänomenen. Betrachten wir zum Beispiel eine Pauke oder eine Trommel, deren Haut gleichmäßig dick und gleichmäßig gespannt ist. Die Klangfarbe der Trommel wird stark von der Form der schwingenden Membran beeinflußt. Eine runde Membran hat andere Obertöne als eine ovale Membran. In der Sprache der Mathematik ausgedrückt heißt dies, dass die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen von der Form des Gebiete abhängen. Eine der zentrale Fragen der Spektralgeometrie ist es, Zusammenhänge zwischen den Eigenwerten des Laplace-Operators und der Gestalt der schwingenden Objekte zu finden.

Eines der wesentlichen Prinzipien der Quantenmechanik besagt, dass in der mikroskopischen Größenordnung so gut wie alles in unserer Welt durch Wellen beschrieben wird. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt hingegen makroskopische Phänomene: Materie krümmt die 4-dimensionale Vereinigung von Zeit (1 Dimension) und Raum (3 Dimensionen). Will man diese beiden Theorien vereinen, benötigt man eine Theorie der Schwingungen gekrümmter Räume. Das Verhalten der Elementarteilchen wird durch partielle Differentialgleichungen bestimmt: der Laplace-Operator beschreibt Teilchen mit ganzzahligem Spin und der Dirac-Operator Teilchen mit halbzahligem Spin. Das Spektrum dieser Operatoren entspricht möglichen Energiewerten der Elementarteilchen.

2 Mathematische Implikationen

In den 60er Jahren stellte sich zur Überraschung vieler Mathematiker heraus, dass Dirac-Operatoren auf gekrümmten Räumen nicht nur für physikalische Anwendungen interessant sind, sondern entscheidend zum Verständnis gekrümmter Räume beliebiger Dimension, sogenannter Riemannscher Mannigfaltigkeiten, beitragen. Aus der Vielzahl möglicher Anwendungen sollen drei hier erwähnt werden.

- Ein Satz von Atiyah und Singer verbindet das Spektrum des Dirac-Operators mit topologischen Größen. Dies führt zu notwendigen topologischen Bedinungen für die Existenz von Metriken mit positiver Skalarkrümmung auf kompakten Mannigfaltigkeiten.
- Die mathematischen Physiker Seiberg und Witten definierten eine Theorie, die zu einem deutlich verbesserten Verständnis 4-dimensionaler Räume führte. Die Lösungen einer nichtlinearen Monopolgleichung werden studiert. Und die „Anzahl" der Lösungen ist eine charakterisiere Größe für die globale Struktur des Raumes, sprich für dessen Topologie.
- Eigenwerte von Dirac-Operatoren stehen in Verbindung zu wichtigen Größen der Elementaren Differentialgeometrie. Der erste Eigenwert des Quadrats des Dirac-Operators einer Fläche in $\mathbf{R}^3$ ist eine untere Schranke an das Willmore-Integral $\int H^2$ (siehe [3]). Die Willmore-Vermutung (siehe [7]) besagt, dass das Willmore-Integral für immersierte Tori immer größer oder gleich $2\pi^2$ ist. Diese Vermutung ist bis heute nur teilweise gelöst worden. Für eine gewisse Teilklasse von Tori konnte diese Vermutung mit der vorliegenden Dissertation verfiziert werden.

3 Ergebnisse der Doktorarbeit

Der Dirac-Operator auf gekrümmten Räumen hängt wesentlich von der sogenannten Spin-Struktur ab. Der Dirac-Operator existiert nur, wenn solch eine Spin-Struktur existiert, und zu jeder solchen Spin-Struktur existiert ein Dirac-Operator. Der Einfluß der Spin-Struktur auf das Spektrum des Dirac-Operators wurde allerdings bisher in der Literatur kaum untersucht. Hauptziel der Doktorarbeit war, eine Abschätzung des kleinsten Eigenwert des Dirac-Operators zu finden, die diese topologische Struktur mit einbezieht. Da sich der Fall gekrümmter Räume beliebiger Dimensionen als sehr unhandlich erwies, konzentriert sich ein großer Teil der Arbeit auf den Torus. Eine Abschätzung von Thomas Friedrich für flache Tori wurde auf den nicht-flachen Fall verallgemeinert [4]. Mittels des oben beschriebenen Zusammenhangs zwischen Eigenwerten des Dirac-Operators und dem Willmore-Integral erhielten wir eine untere Schranke an den Wert des Willmore-Integrals. Die damit erhaltene Schranke ist in vielen Fällen besser als alle Schranken, die zuvor in der Literatur bekannt waren. Diese Abschätzung löste einen Spezialfall der Willmore-Vermutung [2].

Abgesehen von diesem Hauptergebnis wurden auch andere wichtige Spektraleigenschaften des Dirac-Operators untersucht. Motiviert durch Untersuchungen des japanischen Mathematikers Fukaya [5] zur Konvergenz des Spektrum des Laplace-Operators unter Kollaps, untersuchten wir das Spektrum des Dirac-Operators auf kollabierenden Kreisbündeln. Wir stellten fest, dass die Frage, ob Konvergenz oder Nichtkonvergenz des Spektrum vorliegt, von der Spin-Struktur abhängt. Diese Ergebnisse wurden kürzlich von John Lott [6] in einen allgemeineren Kontext gestellt.

In einem letzten Kapitel konstruierten wir Deformationen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die das Spektrum des Dirac-Operators invariant lassen.

Literatur

[1] B. Ammann. *Spin-Strukturen und das Spektrum des Dirac-Operators*, Dissertation, Universität Freiburg im Breisgau 1998, Shaker-Verlag Aachen 1998.

[2] B. Ammann. *The Willmore Conjecture for immersed tori with small curvature integral*, Manuscripta Math., **101(1)**, *1–22*, (2000)

[3] C. Bär. *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Global Anal. Geom. **16(6)**, *573–596* (1998)

[4] T. Friedrich, *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*. Colloq. Math. **48**, *57–62* (1984)

[5] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator,* Invent. Math. **87**, *517–547* (1987)

[6] J. Lott, *Collapsing and Dirac-type operators*, Preprint May 2000, University of Michigan, Ann Arbor, `http://xxx.lanl/gov/abs/math/0005009`

[7] T. J. Willmore. *Note on embedded surfaces*, An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **11B** (1965), 493–496.

Danksagung

Um gute Mathematik betreiben zu können, ist eine gute Arbeitsatmosphäre unerlässlich, und gerne denke ich an die gute Zusammenarbeit in Freiburg in den Bereichen Geometrie und Analysis zurück. Aus diesem Grunde möchte ich an dieser Stelle allen Mitglieder der Arbeitsgruppen Geometrie und Analysis für die vielfältige Unterstützung in jeglicher Hinsicht danken, angefangen bei sehr anregenden Vorlesungen und Seminaren der Professoren bis hin zur Unterstützungen bei Computer-Problemen durch meine Kollegen. Mein besonderer Dank gilt Prof. Christian Bär für seinen guten Überblick und seine vielen guten Ratschläge. Danken möchte ich auch den Professoren Bangert und Kuwert für viele gute Anregungen und ein immer offenes Ohr für Fragen. Entscheidende Bereicherung hat meine Arbeit auch durch viele Anregungen von Physikern aus der Abteilung von Prof. Römer erhalten.

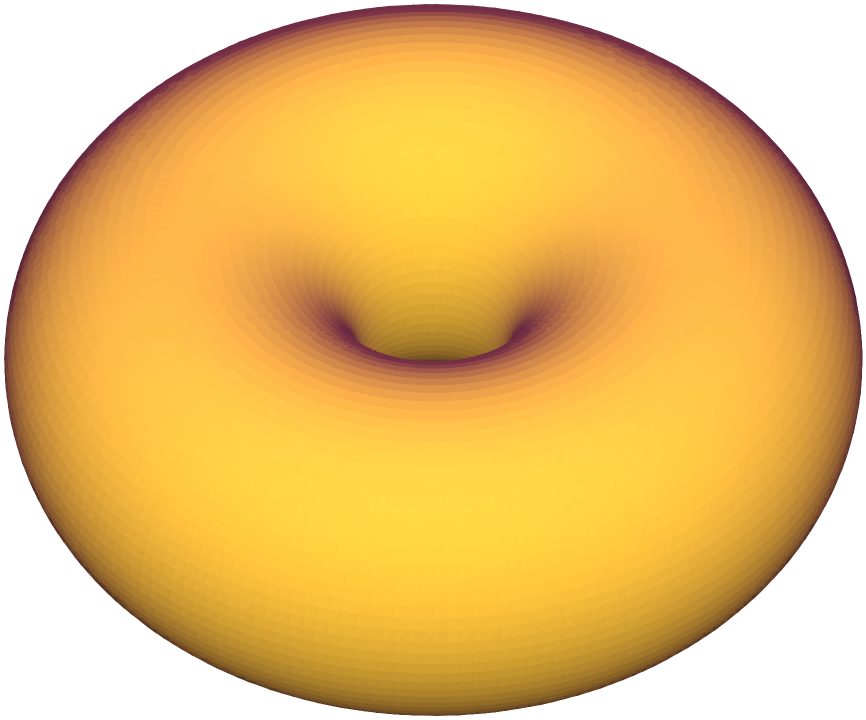

Abbildung 1: *Der Torus. Die Dissertation untersucht Eigenwerte des Dirac-Operators auf dem Torus.*